

Principe d'Heisenberg et fonctions positives

Jean Bourgain¹, Laurent Clozel² et Jean-Pierre Kahane

On décrit un problème naturel concernant les transformées de Fourier, qui introduit des constantes B_d dépendant de la dimension d .

Le problème est posé, en dimension 1, dans la première section, où on décrit une réduction simple au cas des fonctions autoduales. Le premier résultat est une minoration de B_1 .

Puis on considère une classe très naturelle de fonctions qui donne simplement une majoration de B_1 . Celle-ci n'est pas optimale : on décrit des arguments simples qui permettent de l'améliorer (section 2).

Dans la section 3, ces calculs sont étendus aux dimensions arbitraires, donnant une minoration et une majoration simples des constantes.

Enfin, la section 4, arithmétique, relie ce problème à une question bien connue concernant les fonctions zêta des corps de nombres. Les arguments arithmétiques montrent que la croissance linéaire de B_d en fonction de la dimension est naturelle au vu de propriétés connues de la ramification de ces corps.

1 Position du problème et minoration de B_1

Considérons un couple de fonctions (f, \widehat{f}) sur la droite réelle ; c'est un couple de Fourier si

$$\begin{cases} \widehat{f}(y) = \int f(x) e^{-2i\pi xy} dx, & f \in L^1(\mathbb{R}) \\ f(x) = \int \widehat{f}(y) e^{2i\pi xy} dy, & \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Ainsi f et \widehat{f} sont continues et tendent vers 0 à l'infini. On s'intéresse aux couples de Fourier (f, \widehat{f}) tels que

- 1) f et \widehat{f} sont réelles et paires, non identiquement nulles ;

¹Partially supported by NSF grant 0808042

²Membre de l'Institut Universitaire de France

2) $f(0) \leq 0$ et $\widehat{f}(0) \leq 0$;

3) $f(x) \geq 0$ pour $x \geq a_f$ et $\widehat{f}(y) \geq 0$ pour $y \geq a_{\widehat{f}}$.

Noter que la condition 2) et la non-nullité de f, \widehat{f} impliquent que a_f et $a_{\widehat{f}}$ sont > 0 .

Problème : Quelle est la borne inférieure du produit $a_f a_{\widehat{f}}$ pour les couples de Fourier (f, \widehat{f}) vérifiant (1-3) ?

On désignera cette borne inférieure par $B_1 \geq 0$ (noter que de tels couples existent à l'évidence). Nous allons montrer, ce qui n'est pas évident a priori, que B_1 est strictement positif.

Jusqu'à la section 3, nous nous limiterons à la dimension 1. Pour un couple de Fourier vérifiant (1-3) posons

$$\begin{aligned} A(f) &= \inf\{x > 0 : f(]x, \infty[) \subset \mathbb{R}^+\} \\ A(\widehat{f}) &= \inf\{y > 0 : \widehat{f}(]y, \infty[) \subset \mathbb{R}^+\}. \end{aligned}$$

Le produit $A(f) A(\widehat{f})$ est invariant par changement d'échelle, c'est-à-dire si on remplace $f(x), \widehat{f}(y)$ par $f(x/\lambda), \lambda \widehat{f}(y\lambda)$. Puisque

$$B_1 = \inf A(f) A(\widehat{f})$$

pour tous les couples de Fourier vérifiant (1-3), on peut donc se limiter à ceux pour lesquels $A(f) = A(\widehat{f})$. Alors $f + \widehat{f} \neq 0$ (considérer ses valeurs en des points voisins de $A(f)$ et supérieur à celui-ci), et

$$A(f + \widehat{f}) \leq A(f) = A(\widehat{f}).$$

Donc $B_1 = \inf A^2(f + \widehat{f})$. On voit donc que

$$B_1 = A^2 \quad A = \inf A(f)$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$, réelles et paires, non identiquement nulles, égales à leur transformée de Fourier, et telles que $f(0) \leq 0$.

Posons

$$\gamma(x) = e^{-\pi x^2},$$

de sorte que $\gamma = \widehat{\gamma}$. Si $f(0) < 0$, $f - f(0)\gamma$ est non nulle et vérifie les mêmes conditions que f , et

$$A(f - f(0)\gamma) \leq A(f).$$

Finalement,

$$(1.1) \quad A = \inf A(f) ,$$

la borne inférieure portant sur les fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$ réelles, paires, non identiquement nulles, et telles que $f = \widehat{f}$ et $f(0) = 0$.

Voici un résultat important.

THÉORÈME 1. *Soit $\lambda = -\inf \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 0,2172\dots$*

$$\text{Alors} \quad A \geq \frac{1}{2(1+\lambda)} = 0,4107\dots$$

$$\text{donc} \quad B_1 \geq 0,1687\dots$$

Démonstration. Choisissons $f = \widehat{f}$, $f(0) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx := \int_{\mathbb{R}} |f| = 1$. Ecrivons simplement $A = A(f)$. Posons $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. Comme $\int_{\mathbb{R}} f = \widehat{f}(0) = 0$, on a $\int_{\mathbb{R}} f^+ = \int_{\mathbb{R}} f^- = \int_{-A}^A f^- = \frac{1}{2}$. Donc $\int_{|x| \geq A} |f| = \int_{|x| \geq A} f^+ \leq \frac{1}{2}$, donc $\int_{|x| \leq A} |f| \geq \frac{1}{2}$. Or $|f(x)| \leq \int |\widehat{f}| = 1$. Donc $2A \geq \frac{1}{2}$, d'où une première minoration $A \geq \frac{1}{4}$. On verra que cet argument s'étend aux dimensions supérieures.

En dimension 1, on peut le raffiner de la façon suivante. Ecrivons, f étant autoduale :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f(y) \cos 2\pi y x dy = \int f(y) (\cos 2\pi y x - 1) dy = \\ &= \int f^-(y) (1 - \cos 2\pi y x) dy - \int f^+(y) (1 - \cos 2\pi y x) dy . \end{aligned}$$

Ceci implique, les deux intégrales étant positives :

$$f^-(x) \leq \int f^+(y) (1 - \cos 2\pi y x) dy ,$$

d'où

$$\frac{1}{4} = \int_0^A f^- \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f^+(y) \left[A - \frac{\sin 2\pi y A}{2\pi y} \right] dy$$

et donc

$$\frac{1}{4} \leq \frac{A}{2} \sup_{u \in \mathbb{R}} \left(1 - \frac{\sin u}{u} \right) = \frac{A}{2} (1 + \lambda)$$

d'où le théorème.

Plus loin, nous aurons besoin de considérer aussi des fonctions assez régulières. Une classe naturelle est l'espace \mathcal{S} de Schwartz. Il n'est point évident que la borne A définie par (1.1), quand on impose de surcroît à f d'appartenir à \mathcal{S} , coïncide avec celle définie pour f parcourant L^1 .

Notons \mathcal{B}_1 la constante A^2 , où A est définie par (1.1) pour $f \in \mathcal{S}$. On va voir que B_1 et \mathcal{B}_1 diffèrent assez peu. On a évidemment

$$(1.2) \quad B_1 \leq \mathcal{B}_1 .$$

Soit

$$B_1^- = \inf(A^2 \mid f(0) < 0, f = \widehat{f} \text{ paire} \neq 0, f \in L^1) .$$

Donc B_1^- est définie par (1.1), où l'on impose $f(0) < 0$. On définit de même \mathcal{B}_1^- en imposant de surcroît $f \in \mathcal{S}$.

A l'évidence :

$$(1.3) \quad B_1^- \leq \mathcal{B}_1^-$$

$$(1.4) \quad \mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_1^- , \quad B_1 \leq B_1^- .$$

Vérifions que $\mathcal{B}_1^- \leq B_1^-$. Soit $f \in L^1$ vérifiant la condition (1.1) mais avec $f(0) < 0$, et soit $a = A(f)$. Soit $\varphi = \psi * \psi$, ψ étant C^∞ , paire, positive et de support compact très voisin de 0, et $g = f * \varphi$. Alors $A(g) \leq a + \varepsilon$ et $g(0) < 0$. On a $\widehat{g} = \widehat{f}\widehat{\psi}^2$; en performant la même opération sur \widehat{g} on obtient une fonction $h \in \mathcal{S}$ telle que $h = \widehat{h}$, $h(0) < 0$ et $A(h) \leq a + \varepsilon$; on en déduit que $\mathcal{B}_1^- \leq B_1$ soit

$$(1.5) \quad \mathcal{B}_1^- = B_1^- .$$

Noter que l'argument ne s'applique pas si $f(0) = 0$. On va montrer

$$(1.6) \quad B_1^- \leq 2 B_1 ;$$

d'après (1.4) et (1.6) on en déduit

$$(1.7) \quad B_1 \leq \mathcal{B}_1 \leq 2 B_1 .$$

Soit f vérifiant (1.1) et $a = A(f)$. Puisque $\widehat{f}(0) = \int f(x)dx = 0$, f prend des valeurs strictement négatives sur $[-a, a]$. Soit $b > 0$ tel que $f(b) < 0$, et considérons la distribution

$$T = \delta_b + \delta_{-b} + 2\delta_0.$$

C'est une mesure positive, de type positif :

$$\widehat{T} = 2 \cos(2\pi by) + 2 \geq 0.$$

On a

$$(T * f)(0) = f(b) + f(-b) < 0.$$

Puisque $b < a$, $g = T * f$ vérifie donc :

$$g(0) < 0, \quad g \geq 0 \text{ sur } [2a, \infty[.$$

De plus $\widehat{g} = \widehat{T}\widehat{f}$ est ≥ 0 sur $[a, \infty[$, et $\widehat{g}(0) = 0$. Par dilatation, on obtient alors une fonction h telle que

$$\begin{aligned} h &\geq 0 \quad \text{sur } [a\sqrt{2}, \infty[, \quad h(0) < 0 \\ \widehat{h} &\geq 0 \quad \text{sur } [a\sqrt{2}, \infty[, \quad \widehat{h}(0) = 0. \end{aligned}$$

Les fonctions h et \widehat{h} sont réelles et paires. Alors $h + \widehat{h}$ vérifie les conditions relatives au calcul de B_1^- . Donc $B_1^- \leq (a\sqrt{2})^2 = 2a$; variant f , on en déduit enfin (1.6).

2 Majoration de B_1

Une première idée est d'associer à f son développement d'Hermite

$$f(x) \sim \sum_0^\infty a_n H_n(x)$$

où les H_n sont des vecteurs propres de l'opérateur de Fourier \mathcal{F} , correspondant aux valeurs propres i^n . Ainsi $f = \widehat{f}$ s'exprime comme

$$f(x) \sim \sum_0^\infty a_{4m} H_{4m}(x).$$

Les H_n sont de la forme $H_n(x) = e^{-\pi x^2} P_n(x)$ où P_n est un polynôme de degré n . Une combinaison linéaire convenable de H_0 et H_4 (telle que $f(0) = 0$) donne $\pi A^2 \leq 3$. Plus loin, les calculs semblent difficiles et nous n'avons pas poursuivi cette voie.

On peut aussi considérer les fonctions

$$(2.1) \quad g_a(x) = a\gamma(ax) + \gamma\left(\frac{x}{a}\right) - (1+a)\gamma(x), \quad a > 1$$

qui satisfont aux condition de (1.1). Alors toute expression de la forme

$$(2.2) \quad \int_1^\infty g_a(x) d\tau(a)$$

où τ est une mesure sur $]1, \infty[$ telle que l'intégrale converge pour tout x et est ≥ 0 à l'infini est une fonction candidate. (Il paraît difficile de déterminer une propriété simple et caractéristique de τ assurant que (2.2) est convergente et positive à l'infini).

Nous étudions d'abord $A(g_a)$. Il est commode de poser $X = \pi x^2$, et $G_a(X) = g_a(x)$. Ainsi

$$G_a(X) = a e^{-a^2 X} + e^{-a^{-2} X} - (1+a)e^{-X}.$$

De plus

$$(2.3) \quad H_a(X) = e^X G_a(X) = a e^{(1-a^2)X} + e^{(1-a^{-2})X} - 1 - a$$

est une fonction convexe, vérifiant

$$H_a(0) = 0, \quad H'_a(0) = -a^{-2}(a^2 - 1)(a^3 - 1) < 0$$

et tendant vers $+\infty$ avec X . Elle admet donc un unique zéro $X_a > 0$, et

$$A(g_a) = \sqrt{\frac{X_a}{\pi}}.$$

Il est naturel d'étudier la variation de X_a , et tout d'abord pour a voisin de 1. Posant $a = 1 + h$, $h > 0$, il vient pour X fixé

$$H_a(X) = (1+h)(e^{-X(2h+h^2)} - 1) + e^{X(2h-3h^2+3h^3-4h^4)} - 1$$

modulo $O(h^5)$. Ceci s'écrit $P_1h + P_2h^2 + P_3h^3 + P_4h^5 + O(h^5)$, où les polynômes P_i sont :

$$\begin{aligned} P_1 &= 0 \\ P_2 &= 2X(2X - 3) \\ P_3 &= -X(2X - 3) \\ P_4 &= -5X + 15X^2 - \frac{28}{3}X^3 + \frac{4}{3}X^4. \end{aligned}$$

L'expression de P_2 montre que pour h assez petit $H_a(X) > 0$ si $X > \frac{3}{2}$ et $H_a(X) < 0$ si $X < \frac{3}{2}$. Par conséquent,

$$(2.4) \quad \lim_{a \rightarrow 1^+} X_a = \frac{3}{2}.$$

Ce qui fournit une borne explicite

$$(2.5) \quad A \leq \sqrt{\frac{3}{2\pi}}.$$

Mais cette borne simple ne peut être la vraie valeur de A . Pour $X = \frac{3}{2}$, P_2 et P_3 s'annulent, et

$$P_4\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Pour h petit et non nul, on a donc $X_a < \frac{3}{2}$.

Si $a \rightarrow +\infty$, $X_a \rightarrow +\infty$; en fait, un calcul simple montre que

$$X_a = \log a + O(1) \quad (a \rightarrow +\infty).$$

Nous n'avons pas déterminé la valeur minimale de X_a , mais il est facile de l'estimer, de façon semi-heuristique. La valeur $a = \sqrt{2}$ donne, en posant $q = e^{\frac{1}{2}X_a}$:

$$q^3 - (1 + \sqrt{2})q^2 + \sqrt{2} = 0;$$

si $q \neq 1$, l'équation quadratique

$$q^2 - \sqrt{2}q - \sqrt{2} = 0$$

donne $q = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{2}})$,

$$X_a = 2 \log q = 1,4749 \dots < \frac{3}{2} \quad (a = \sqrt{2}).$$

La valeur $a = 2$ donne, pour $q = e^{\frac{3}{4}X}$:

$$q^4 - 2\frac{q^4 - 1}{q - 1} = 0.$$

La solution $q > 1$ est $q = 2,9744\dots$, d'où

$$X_a = 1,4534\dots \quad (a = 2).$$

Il est vraisemblable que c'est à peu près la valeur optimale accessible par cette méthode. En effet si l'on résout $H_a(X) = 0$, H_a donnée par (2.3), et que l'on suppose $a \geq 2$, le premier terme est négligeable. Donc X_a est à peu près

$$\frac{\log(1+a)}{1-a^{-2}}.$$

L'extremum de cette expression est atteint pour $a(1-a) = 2 \log(1+a)$, qui donne

$$a = 2,08137\dots$$

Dans tous les cas, la valeur minimale $A(g_a)$ ainsi obtenue n'est pas la valeur (1.1) cherchée. Considérons en effet a_0 tel que $X_0 = X_{a_0}$ soit minimal, et $H_0 = H_{a_0}$, positive sur $[X_0, \infty[$.

Soit a (par exemple, voisin de 1) tel que $X_a > X_0$. Sur $[X_a, \infty[$, H_a est ≥ 0 et son ordre de croissance pour $X \rightarrow +\infty$, en $e^{(1-a^{-2})X}$, est plus petit que celui de H_{a_0} si $a < a_0$. Il existe donc $T > 0$ tel que $H_{a_0} - TH_a$ soit ≥ 0 sur $[X_a, \infty[$. Mais cette fonction est > 0 sur $[X_0, X_a[$, donc sur un voisinage de X_0 , donc pour $X \geq X'$ avec $X' < X_0$.

Le même argument s'applique en prenant tout a_0 tel que $X_0 < \frac{3}{2}$. Pour $a_0 = 2$, on peut déterminer la correction optimale (qui correspond à a très voisin de 1), donnant une fonction ≥ 0 sur $[X'', \infty[$, avec

$$(2.6) \quad \begin{array}{ll} X'' &= 1,25\dots \\ A &\leq 0,63\dots \end{array}$$

Nous n'avons fait qu'un calcul très approché. Enonçons néanmoins le résultat, à comparer au théorème 1.

THÉORÈME 2. *On a $A \leq 0,64$ et $B_1 \leq 0,41$.*

3 Dimensions supérieures

Nous nous plaçons dans \mathbb{R}^d euclidien, produit scalaire

$$x \cdot y = \sum_1^d x_i y_i, \quad \|x\| = (x \cdot x)^{1/2},$$

la transformée de Fourier étant donnée par

$$(3.1) \quad \widehat{f}(y) = \int f(x) e^{-2i\pi x \cdot y} dx$$

où $dx = dx_1 \dots dx_d$ est la mesure de Lebesgue ; alors

$$(3.2) \quad f(x) = \int \widehat{f}(y) e^{2i\pi x \cdot y} dy.$$

On suppose f, \widehat{f} continues et intégrables. Plus généralement, si E est un espace euclidien de dimension d , si la mesure invariante dx sur E est choisie de sorte que la mesure du cube engendré par une base orthonormale soit égale à 1, et si $x \cdot y$ désigne le produit scalaire, la transformée de Fourier (3.1) a pour réciproque (3.2).

On considère les couples de Fourier (f, \widehat{f}) vérifiant (3.3)

- 1) f, \widehat{f} réelles et paires, non identiquement nulles
- 2) $f(0) \leq 0$ et $\widehat{f}(0) \leq 0$
- 3) $f(x) \geq 0$ pour $\|x\| \geq a_f$, $\widehat{f}(y) \geq 0$ pour $\|y\| \geq a_{\widehat{f}}$.

On définit, comme dans le §1, $A(f)$ et $A(\widehat{f})$:

$$A(f) = \inf \{ r > 0 : f(x) \geq 0 \text{ si } \|x\| > r \},$$

et

$$B_d = \inf A(f) A(\widehat{f})$$

pour les couples vérifiant 1), 2), 3). Soit $f^\#(x)$ l'intégrale (invariante) de f sur la sphère de rayon $\|x\|$: $\widehat{f}^\# = (\widehat{f})^\#$, et $f^\#$ et $\widehat{f}^\#$ ne sont pas nulles ; sinon f et \widehat{f} seraient à support compact d'après 3). Puisque $A(f^\#) \leq A(f)$ et $A(\widehat{f}^\#) \leq A(\widehat{f})$, on peut se limiter aux couples de fonctions radiales. Puisque

$$(f(x/\lambda))^\wedge = \lambda^d \widehat{f}(\lambda y) \quad (\lambda > 0),$$

l'argument du §1 s'applique alors et l'on voit que

$$(3.4) \quad B_d = A^2, \quad A = \inf A(f),$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des fonctions $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, radiales, non identiquement nulles, et telles que $f = \widehat{f}$ et $f(0) = 0$.

On a, comme dans le §1, ajouté si nécessaire un multiple de la fonction, radiale et autoduale

$$\gamma(x) = e^{-\pi\|x\|^2}.$$

THÉORÈME 3. *On a $B_d \geq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) \right)^{2/d} > \frac{d}{2\pi e}$*

Démonstration. Elle est calquée sur le cas $d = 1$, en remplaçant l'intervalle $(-A(f), A(f))$ par la boule de centre O et de rayon $A(f)$, dont le volume $(\geq \frac{1}{2})$ est $\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}(A(f))^d \pi^{d/2}$.

Posant $X = \pi\|x\|^2$, l'argument du §2 nous amène à considérer les fonctions naturelles

$$g_a(x) = G_a(X) \quad (x \in \mathbb{R}^d)$$

où

$$G_a(X) = a^d e^{-Xa^2} + e^{-Xa^{-2}} - (1 + a^d)e^{-X},$$

et enfin

$$H_a(X) = a^d e^{(1-a^2)X} + e^{(1-a^{-2})X} - (1 + a^d), \quad a > 1.$$

Il est commode de poser $a^2 = 1 + k$, $d = 2c$, d'où

$$H_a(X) = (1 + k)^c e^{-kX} + e^{(1-(1+k)^{-1})X} - 1 - (1 + k)^c.$$

La dérivée à l'origine en X est

$$\frac{k}{1+k} \left(1 - (1+k)^{c+1} \right) < 0;$$

l'argument de convexité du §2 montre que H_a a un unique zéro positif X_a . Comme auparavant, nous calculons un développement en k limité à l'ordre 4 de $H_a(X)$. Il vient

$$H_a(X) = P_1 k + P_2 k^2 + P_3 k^3 + P_4 k^4 + O(k^5),$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= 0 \\
P_2 &= X(X - c - 1) \\
P_3 &= \frac{1}{2}(c - 2)X(X - c - 1) \\
P_4 &= \frac{1}{12}X\{X^3 - (2c + 6)X^2 + (3c(c - 1) + 18)X - \\
&\quad -(2c(c - 1)(c - 2) + 12)\}.
\end{aligned}$$

Comme en dimension 1, on voit que P_2 et P_3 s'annulent pour

$$(3.4) \quad X = X(d) := \frac{d}{2} + 1$$

De plus P_2 est > 0 pour $X > X(d)$, < 0 pour $X < X(d)$. Faisant tendre k vers 0 on en déduit

$$\lim_{a \rightarrow 1} X_a = \frac{d}{2} + 1$$

Pour comprendre la position de X_a par rapport à $X(d)$ quand $a \rightarrow 1$, calculons $Q_4(X(d))$, où $P_4 = \frac{X}{12}Q_4$. Le calcul donne

$$Q_4(c + 1) = -c^2 + 1.$$

Pour $d > 2$, ce terme est donc < 0 , donc $H_a(X(d)) < 0$ pour a proche de 1, ce qui montre que

$$X_a > \frac{d}{2} + 1 \quad (a > 1, \text{ assez proche de } 1).$$

Il est donc possible que la valeur (3.4) soit optimale. Pour $d = 1$, ce n'est pas le cas, comme on l'a vu au §2.

Pour $d = 2$, $Q_4(c + 1) = 0$, donc nous devons calculer, à l'ordre 5 au moins, le développement limité de

$$(3.5) \quad H_a(2) = (1 + k)e^{-2k} + e^{2(1 - \frac{1}{1+k})} - 2 - k.$$

Le développement de Taylor en 0 de

$$\begin{aligned}
f(z) &= e^{2(1 - \frac{1}{1+z})} = e^{2\frac{z}{1+z}} : \\
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n,
\end{aligned}$$

se calcule par le théorème des résidus. Posant

$$w = \frac{z}{1+z}, \quad z = \frac{w}{1-w}, \quad dz = \frac{dw}{(w-1)^2},$$

il vient, les intégrales étant prises sur un petit contour autour de 0 :

$$\begin{aligned} q_n &= \text{Res}_{z=0} \frac{f(z)}{z^{n+1}} = \frac{1}{2i\pi} \oint e^{\frac{2z}{1+z}} \frac{dz}{z^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint e^{2w} \frac{(1-w)^{n+1}}{w^{n+1}} \frac{dw}{(1-w)^2} \\ &= \text{Res}_{w=0} \frac{(1-w)^{n-1}}{w^{n+1}} e^{2w}. \end{aligned}$$

En particulier, p_5 est la somme de

$$(3.6) \quad \frac{2^4}{4!} - \frac{2^5}{5!}$$

venant du premier terme de (3.5), et du terme en w^5 de $e^{2w}(1-w)^4$, égal à

$$(3.7) \quad \frac{2^5}{5!} - 4 \cdot \frac{2^4}{4!} + 6 \cdot \frac{2^3}{3!} - 4 \cdot \frac{2^2}{2!} + 2.$$

On trouve que $p_5 = 0$.

De même, p_6 est la somme de

$$(3.8) \quad -\frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!}$$

et de

$$(3.9) \quad \frac{2^6}{6!} - 5 \cdot \frac{2^5}{5!} + 10 \cdot \frac{2^4}{4!} - 10 \cdot \frac{2^3}{3!} + 5 \cdot \frac{2^2}{2!} - 2,$$

d'où

$$p_6 = -\frac{4}{45} < 0.$$

Pour a très voisin de 1, on a donc $H_a(2) < 0$ et $X_a > X(2) = 2$. Là encore, il est possible que la borne donnée par (3.4) soit optimale.

Pour conclure ce paragraphe, noter que l'on a obtenu pour tout $d \geq 2$ la borne supérieure

$$(3.10) \quad B_d \leq \mathcal{B}_d \leq \frac{d+2}{2\pi}$$

où \mathcal{B}_d est défini, comme dans le §1, par les fonctions de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs les considérations de la fin du §1, relatives aux bornes pour L^1 et pour \mathcal{S} , s'appliquent. Dans la démonstration de l'inégalité (1.6), on doit considérer $T = \delta_b + \delta_{-b} + 2\delta_0$, où $\|b\| < a = A(f)$ et $f(b) < 0$; $\widehat{T} = 2 \cos(2\pi b \cdot y) + 2$ est une onde plane positive. Le reste de l'argument est identique, en remplaçant $h + \widehat{h}$ par la moyenne sphérique de $h + \widehat{h}$ si on veut s'en tenir aux fonctions radiales. En conclusion, à comparer au Théorème 3 :

THÉORÈME 4. *On a*

$$(3.11) \quad B_d \leq \mathcal{B}_d \leq \frac{d+2}{2\pi}, \quad B_d \geq \frac{1}{2}\mathcal{B}_d.$$

4 Un argument arithmétique

Soit F un corps de nombres de degré d sur \mathbb{Q} . On désigne par v les places (finies ou archimédiennes) de F , et par F_v la complétion correspondante; pour v finie $\mathcal{O}_v \subset F_v$ est l'anneau des entiers et \mathcal{O}_v^\times son groupe des unités; q_v est le cardinal du corps résiduel. Soit

$$\mathbb{A}_F = \prod_v' F_v$$

(produit restreint) l'anneau des adèles de F , et $\mathbb{A}_F^\times = I_F$ le groupe des idèles. Soit $|| : x \in I_F \mapsto \prod_v |x|_v$ la norme d'idèle,

$$\begin{aligned} I_F^1 &= \{x \in I_F : |x| = 1\} \\ \text{et } I_F^+ &= \{x \in I_F : |x| \geq 1\}. \end{aligned}$$

On considère la mesure invariante $dx = \prod dx_v$ sur \mathbb{A}_F , dx_v étant une mesure de Haar sur F_v . En les places finies, dx_v est la mesure autoduale de Tate [5]; en une place réelle; dx est la mesure de Lebesgue; en une place complexe, dont l'on note $z = x + iy$ la variable, $dz = 2dxdy$. En une place réelle, la transformée de Fourier $\widehat{f}(y)$ d'une fonction f est définie comme dans le reste de cet article.

Si $z = x + iy$ est le paramètre en une place complexe, et $w = \xi + i\eta$, Tate définit la transformée $\widehat{f}(w)$ d'une fonction $f(z)$ par

$$\begin{aligned} \widehat{f}(w) &= \int f(z) e^{-2i\pi \text{Tr}(zw)} dz \\ \text{où } \text{Tr}(zw) &= 2\text{Re}(zw) = 2(x\xi - y\eta). \end{aligned}$$

Pour des fonctions radiales, donc paires en chacune des variables, ceci revient à considérer la transformée de Fourier définie, comme dans le §3, par le produit scalaire $z \cdot w = 2(x\xi + y\eta)$. La mesure autoduale dz de Tate est la mesure normalisée considérée au début du §3 pour un espace euclidien abstrait.

Soit f la fonction de l'espace de Schwartz de \mathbb{A}_F donnée par

$$(4.1) \quad f(x) = \prod_{v|\infty} f_v(x_v) \prod_{v \text{ finie}} f_v^0(x_v)$$

où f_v^0 est la fonction caractéristique de \mathcal{O}_v et où, pour v archimédienne, f_v est pour l'instant une fonction arbitraire de l'espace de Schwartz. La fonction zêta de Tate associée est définie pour $\text{Re}(s) > 1$ par

$$Z(f, s) = \int_{I_F} f(x) |x|^s d^\times x,$$

où $d^\times x$ est le produit des $d^\times x_v$, $d^\times x_v = \frac{dx_v}{|x_v|}$ (multiplié par $(1 - q_v^{-1})^{-1}$ aux places finies).

Plutôt que les fonctions décomposées de (4.1), nous considérons, sur \mathbb{R}^d , des fonctions de la forme $g_a(x)$ (§3) où \mathbb{R}^d est considéré comme un espace euclidien par

$$\|x_\infty\|^2 = \sum_{v \text{ réelle}} |x_v|^2 + \sum_{v \text{ complexe}} 2\|z_v\|^2,$$

$\|z\|$ étant la valeur absolue usuelle d'un nombre complexe. (On notera $|z| = \|z\|^2$ la valeur absolue normalisée comme dans la théorie de Tate). Plus généralement,

$$(4.2) \quad f(x) = f_\infty(x_\infty) \prod_{v \text{ finie}} f_v^0(x_v)$$

où $f_\infty(x_\infty) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Les conditions imposées par Tate (i.e., $(z_1), (z_2), (z_3)$ in [5], §4.4) sont vérifiées par de telles fonctions. Par exemple, (z_3) prescrit que l'intégrale

$$\int_{F_\infty} f_\infty(x_\infty) \prod_{v|\infty} |x_v|_v^{\sigma-1} dx,$$

où $F_\infty = \prod_{v|\infty} F_v$, soit absolument convergente pour $\sigma > 1$. C'est vrai en fait pour $\sigma > 0$ et tout $f_\infty \in \mathcal{S}(F_\infty)$. La même condition est donc vérifiée pour \widehat{f} .

Dans le cas où $f_\infty = \prod f_v^0$, avec

$$\begin{aligned} f_v^0(x) &= e^{-\pi x^2} & (\text{variable réelle}) \\ f_v^0(z) &= e^{-2\pi \|z\|^2} & (\text{variable complexe}), \end{aligned}$$

$Z(f, s)$ est la fonction zêta $\zeta_F(s)$, multipliée par ses facteurs archimédiens usuels (produit de fonctions Γ). Ecrivons, d'après Tate,

$$\begin{aligned} (4.3) \quad Z(f, s) &= \int_{I_F^+} f(x) |x|^s d^\times x + \int_{I_F^+} \widehat{f}(x) |x|^{1-s} d^\times x \\ &\quad + \kappa \frac{\widehat{f}(0)}{s-1} - \kappa \frac{f(0)}{s} \end{aligned}$$

où, avec les notations usuelles ([5], Théorème 4.3.2),

$$\kappa = \frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2} h R}{\sqrt{D_F} w}$$

est le résidu en $s = 1$ de $\zeta_F(s)$. En particulier, D_F est le discriminant absolu de F , et $d = r_1 + 2r_2$, r_1 étant le nombre de places réelles et r_2 le nombre de places complexes. Les deux intégrales figurant dans (4.3) sont alors absolument convergentes pour tout $s \in \mathbb{C}$.

LEMME 1.— *Soit s un zéro de $\zeta_F(s)$ tel que $\text{Re}(s) > 0$. Alors $Z(f, s)$ s'annule en s pour tout choix de $f_\infty \in \mathcal{S}(F_\infty)$.*

En effet on peut écrire, d'abord pour $\text{Res} > 1$,

$$Z(f, s) = Z(f_\infty, s) \zeta_F(s).$$

Puisque $Z(f, s)$, ainsi que $\zeta_F(s)$ et $Z(f_\infty, s)$ sont holomorphes pour $s \neq 1$, $\text{Re}(s) > 0$, le Lemme s'en déduit.

Pour toute place finie v , \widehat{f}_v^0 est égale à $|\mathfrak{d}_v|^{-1/2} \text{char}(\mathfrak{d}_v^{-1})$. Ici $\mathfrak{d}_v \subset F_v$ est la différentielle, \mathfrak{d}_v^{-1} son inverse, $\text{char}(\mathfrak{d}_v^{-1})$ la fonction caractéristique, et $|\mathfrak{d}_v|$ est la norme d'idéal (une puissance positive de q_v). Rappelons que

$$\prod_{v \text{ finie}} |\mathfrak{d}_v| = |D_F|.$$

Considérons alors la première intégrale de (4.3) :

$$(4.4) \quad \int_{I_F^+} f(x) |x|^s d^\times x.$$

Si $f(x) \neq 0$ en $x = (x_\infty, x_f)$, la description de $f_f = \prod_{v \text{ finie}} f_v$ montre que $|x_f| \leq 1$; puisque $|x_\infty x_f| \geq 1$,

$$(4.5) \quad |x_\infty| = \prod_{v|\infty} |x_v| \geq 1.$$

Dans la deuxième intégrale, en remarquant que $|x_v| \leq |\mathfrak{d}_v|$ si $x_v \in \mathfrak{d}_v^{-1}$, on a de même $|x_f| \leq \prod_v |\mathfrak{d}_v| = |D_F|$ d'où

$$(4.6) \quad |x_\infty| \geq D_F^{-1}.$$

LEMME 2.— *Supposons qu'il existe un couple de Fourier (f, \hat{f}) sur $F_\infty = \mathbb{R}^d$ tel que $f(x_\infty) \geq 0$ si $|x_\infty| \geq 1$, f prend des valeurs strictement positives au voisinage de 1 dans l'ensemble $|x_\infty| \geq 1$, $\hat{f}(y_\infty) \geq 0$ si $|y_\infty| \geq D_F^{-1}$ et $f(0) = \hat{f}(0) = 0$. Alors $\zeta_F(s) \neq 0$ pour tout s dans l'intervalle $]0, 1[$.*

En effet (4.3) est alors réduit à ses termes intégraux ; $|x|^s$ est strictement positif dans le domaine d'intégration, et l'intégrale (4.4) est strictement positive d'après la propriété imposée à f . Donc $Z(f, s) > 0$ et $\zeta_F(s) \neq 0$ d'après le Lemme 1.

Soit $x = (x_v) \in F_\infty$. La norme euclidienne compatible avec la transformée de Fourier de Tate est

$$\|x\|^2 = \sum_{v \text{ réelle}} |x_v|^2 + 2 \sum_{v \text{ complexe}} \|x_v\|^2.$$

Puisque

$$|x|^2 = \prod_{v \text{ réelle}} |x_v|^2 \prod_{v \text{ complexe}} \|x_v\|^4,$$

l'inégalité arithmético-géométrique donne

$$|x|^{2/d} \leq \frac{1}{d} \|x\|^2.$$

Posant $r = \|x\|$, $\rho = \|y\|$ ($y \in F_\infty$) on voit que

$$\begin{aligned} |x| \geq 1 &\implies r \geq \sqrt{d} \\ |y| \geq |D_F|^{-1} &\implies \rho \geq |D_F|^{-1/d} \sqrt{d}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 1.— *Supposons qu'il existe un corps de nombres F de degré d et de discriminant D tel que $\zeta_F(s)$ a un zéro dans $]0, 1[$. Alors*

$$\mathcal{B}_d \geq d |D|^{-1/d}.$$

Réciproquement, bien sûr, ζ_F n'a pas de zéro réel si

$$d |D|^{-1/d} > \mathcal{B}_d.$$

La démonstration est maintenant évidente. Supposons pour exemple que $d |D|^{-1/d} > \mathcal{B}_d$. On peut trouver f, \hat{f} radiales, comme dans le §3, et ≥ 0 pour $r \geq \sqrt{d}$ et $\rho \geq |D|^{-1/d} \sqrt{d}$. On peut supposer aussi que f prend des valeurs strictement positives sur l'ensemble des x tels que $\sqrt{d} \leq \|x\| \leq \sqrt{d} + \varepsilon$. Les conditions du Lemme 2 sont alors réunies puisque $\|1\| = \sqrt{d}$.

Il est difficile de trouver des corps F vérifiant l'hypothèse de la Proposition. Cependant, la décomposition, pour F galoisien sur E , de $\zeta_F(s)$ en fonctions L d'Artin pour E a permis à Armitage d'exhiber un tel zéro (en $s = \frac{1}{2}$ bien sûr, conformément à l'hypothèse de Riemann).

Plus précisément, Armitage considère une extension explicite F de $E = \mathbb{Q}(\sqrt{3(1+i)})$, de degré 12 sur E et donc de degré 48 sur \mathbb{Q} , construite par Serre [4], et montre que $\zeta_F(\frac{1}{2}) = 0$. ([1], §5).

Par conséquent, la théorie des nombres impliquait a priori la version faible suivante du Théorème 3 :

PROPOSITION 2.— *Si d est multiple de 48, \mathcal{B}_d est strictement positif.*

Pour $d = 48$, ceci résulte de l'existence de F . Supposons que $d = 48c$. Il existe une extension cyclotomique L de \mathbb{Q} de degré c et linéairement disjointe de F . Alors LF est de degré d sur \mathbb{Q} , et ζ_F divise ζ_{LF} puisque LF/F est abélienne, et que ζ_{LF} se factorise donc en produit de fonctions L de Dirichlet relatives à F . D'où le résultat.

On peut se demander si la Proposition 1 implique une restriction sur les discriminants des corps tels que ζ_F ait un zéro réel. Dans ce cas, on a

$$(4.7) \quad |D|^{1/d} \geq \frac{d}{\mathcal{B}_d}.$$

Mais, inconditionnellement d'après le Théorème 3,

$$\frac{d}{\mathcal{B}_d} < 2\pi e = 17,079 \dots$$

Or les minoration d'Odlyzko [2] donnent en général

$$|D|^{1/d} \geq 22, 2(1 + 0(d))$$

pour $d \rightarrow \infty$. Par conséquent (4.7) est automatiquement vérifié, au moins pour d assez grand.

La proposition 2 ne conduit donc pas à une minoration intéressante de \mathcal{B}_d . Il est frappant de remarquer néanmoins que, pour certains degrés au moins, la Théorie des nombres impliquait la croissance linéaire en d donnée par le Théorème 3. Soit en effet p un nombre premier. D'après les théorèmes de Golod–Shafarevič et Brumer, il existe une suite de corps

$$E_p^1 \subset E_p^2 \subset \dots \subset E_p^n \subset \dots$$

où E_p^1 , de degré $p(p-1)$ sur \mathbb{Q} , est une extension de degré p de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ et où E_p^{n+1}/E_p^n est abélienne, non ramifiée de degré p . Voir [3], Cor. 7 ; on a adjoint ζ_p pour obtenir E_p^1 par deux extensions successives, abéliennes, à partir de \mathbb{Q} .

Considérons la suite d'extensions $F_i = F E_p^i$ de F , F_i/F_{i+1} étant abélienne, de degré 1 ou p . On peut en extraire une sous-suite minimale strictement croissante, d'où

$$F_0 = F E_p^{n_0} \subset F_1 \subset \dots \subset F_m = F E_p^{n_m} \subset \dots,$$

chaque extension abélienne de degré p . Vu l'absence de ramification relative, une formule classique donne l'expression des discriminants absolus :

$$(4.8) \quad D(F_m) = D(F_0)^{p^m} := D^{p^m}.$$

Les extensions successives à partir de F étant abéliennes, ζ_F divise ζ_{F_m} pour tout m . La Proposition 1 donne alors pour $d = d_0 p^m$, $d_0 = [F_0 : \mathbb{Q}]$:

$$(4.9) \quad \mathcal{B}_d \geq C d, \quad C = |D|^{-1/d_0}.$$

Pour de telles suites de degrés, (3.10) et (4.8) montrent donc que la croissance de \mathcal{B}_d — et donc de $B_d \geq \frac{1}{2}\mathcal{B}_d$ — est linéaire en d . Si p ne divise pas D_F , F et $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ sont linéairement disjoints et l'on peut choisir E_p^1 linéairement disjoint de F . Alors $F_0 = F E_p^1$ et l'inégalité (4.8) est valide pour $d = 48(p-1)p^n$, $n \geq 1$. Bien sûr, le terme en $(p-1)$ n'est pas nécessaire si l'on est prêt à utiliser la conjecture d'Artin ou la conjecture de divisibilité de Dedekind.

Références

- [1] J. V. ARMITAGE, *Zeta Functions with a zero at $s = \frac{1}{2}$* , Inv. Math. **15** (1972), 199–205.
- [2] A.M. ODLYZKO, *Lower bounds for discriminants of number fields II*, Tôhoku Math. J. **29** (1977), 209–216
- [3] P. ROQUETTE, *On class fields towers*, in *Algebraic Number Theory*, Cassels et Fröhlich eds., Academic Press, 1967, 231–249
- [4] J.-P. SERRE, *Conducteurs d'Artin des caractères réels*, Inv. Math. **14** (1971), 173–183. .
- [5] J. TATE, *Fourier Analysis in Number Fields and Hecke's Zeta-Functions*, in *Algebraic Number Theory*, Cassels et Fröhlich eds., Academic press, 1967, 305–347.

Jean Bourgain
School of Mathematics
Institute for Advanced Study,
Princeton, N.J. 08540
Etats Unis

Laurent Clozel, Jean-Pierre Kahane
Laboratoire de Mathématique
Université Paris-Sud, Bât. 425
91405 Orsay Cedex
France